ДИС 4.12.12

Т1

Ако $f: U \to R$ $U \subset R$ $U = [a,b]$ и f е непрекъсната в U, и $f(a), f(b) < 0$ то съществува $\alpha \in (a,b)$ т. че. $f(\alpha) = 0$

Т2

Ако $f: [a,b]$ е диференцируема (във всяка точка в a,b) и $f'(x) > 0$ то f расте строго

$x_1 < x_2$ то $f(x_1) < f(x_2)$

Т3

Ако f е диференцируема в $a \in D_f$ (D - диференциално множество на f) и g диференцируема във $f(a)$ то $g \circ f$ е диференцируема във a

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

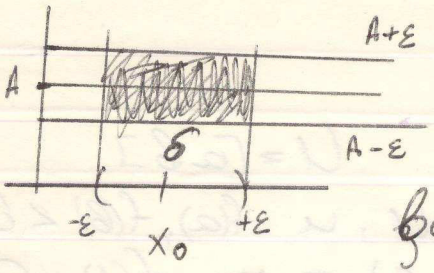
Т4

Ако f е диференцируема в x_0 ($x_0 \in D_x$ - вътрешна точка) и $f(x_0) \neq 0$, f' - непрекъсната в x_0, то съществува околност U на x_0 т. че $f: U \to f(U)$ е обратима, и диференцируема във $f(x_0)$ и $(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$

Деф Хайне

$x \to A$

Ако $f(x_0) \to A$ то казваме че A е граница на $f(t)$ при $t \to x$



Коши

Казваме че A е граница на f при $x \to x_0$ ако за всяко $\varepsilon > 0$, съществува $\delta > 0$ т.че за $|x - x_0| < \delta$ е изпълнено $|f(x) - A| < \varepsilon$

(при непрекъснатост A се слива с x_0)

Т Дефинициите на Хайне и Коши са еквивалентни

Деф Казваме че f има производна $x_0 \in D$ - вътрешна ако съществува $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$. Означаваме горната граница с $f'(x_0)$

$$e^z \overset{def}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{z+h} - e^z}{h} = e^z \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1 + \frac{h}{1!} + \frac{h^2}{2!} + \dots - 1}{1} = \lim 1 + \underbrace{\frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} \dots}_{\text{клони към } 0} = 1$$

от $e^z \frac{e^h - 1}{h} \to e^z \cdot 1 \to e^z$

Δεδ

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$(\cos z)' = \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)' = \left(\frac{e^{iz}}{2} + \frac{e^{-iz}}{2}\right) =$$

$$\left(\frac{e^{iz}}{2}\right) + \left(\frac{e^{-iz}}{2}\right) = \frac{e^{iz}(iz)'}{2} + \frac{e^{-iz}(-iz)'}{2} =$$

$$\left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right) = -\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -\sin z$$

$$(z^n)' = \lim_{h \to 0} \frac{(z+h)^n - z^n}{h} = \lim_{h=0} \frac{\left(z^n + \binom{n}{k} - z^n\right)}{n} =$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(z+h)^k z^{n-k-1}}{n} = \sum_{k=0}^{n-1} (z+h)^k z^{n-k-1} = n z^{n-1}$$

$$z^0 = z^{k-k} = \frac{z^k}{z^k} = 1$$

Άλλο $z \in \mathbb{R}$ το $\cos z \in \mathbb{R}$ $(z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z})$

τ.ε. $\overline{\cos z} = \cos \bar{z} = \cos z$

$$\frac{e^{i\bar{z}} + e^{-i\bar{z}}}{2} = \frac{e^{-i\bar{z}} + e^{i\bar{z}}}{2} = \cos \bar{z}$$

$\cos 0 = 1 > 0$, $\cos 3 < 0$ $\boxed{(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}}$

$\pi = 2 \inf \{x \in (0,3) \mid \cos x_x = 0\}$

Сметнете производната

$$\left(\arcsin \frac{1}{(1-x^2)}\right)' = \left(\arcsin \frac{1}{1-x^2}\right)' \left(\frac{1}{1-x^2}\right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^2}} \cdot \frac{2x}{(1-x^2)^2} = \left[(1-x^2)^{-1}\right] = (-1)(1-x^2)^{-1-1} =$$

$$= -\frac{1}{(1-x^2)^2} \cdot (1-x^2)' = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$$

$x = \arcsin y$ $\quad |x| \le \frac{\pi}{2}$

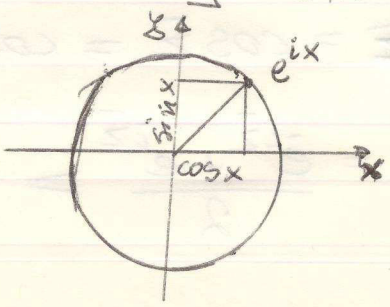
$y = \sin x$ $\quad |y| \le 1$

$$x' = \frac{1}{y'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 x}}$$

$$|e^{ix}| = \sqrt{e^{ix} e^{\overline{ix}}} = \sqrt{e^{ix-ix}} = \sqrt{e^0} = 1$$

Ако $|z| = 1$ то $\exists\, x \in \mathbb{R}$ т.ш. $z = e^{ix}$

$\boxed{(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$



$$\left(\sqrt{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}\right)' = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}} \cdot \left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right) =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\left(\operatorname{arctg} x\right)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$$